等質空間の全測地的部分多様体 (等質構造の部分多様体論的研究)

東條, 晃次

数理解析研究所講究録
1069 巻 1998 年 34-42

等質空間の全測地的部分多様体

千葉工業大学　　東條晃次（Koji TOJO）

1. Introduction

対称空間の全測地的部分多様体は、その等長変換群の (ある種の)Lie 部分群の軌跡 (の一部) として表されることが知られている。[KNo] によれば、Riemann 等質空間の完備な全測地的部分多様体はまた等質空間であるが、一般にはその等長変換群の Lie 部分群の軌跡とはならない。実際、今回扱う 3-対称空間 (に naturally reductive Riemann metric をいれたもの) にもそのような例がある。

ここでは、等質空間のなかでも比較的対称性が高いと思われる 3-対称空間 G/K の全測地的部分多様体で、G のある Lie 部分群の軌跡として表されるもののクラスを与え、さらに分類することを試みる。

2. Preliminaries

G を Lie 群、K をその閉部分群で、$Ad(K)$ がコンパクトとする。このとき、等質空間 G/K には G-不変 Riemann 計量 $<,>$ が存在する。G の位数 3 の自己同型 σ が存在して以下を満たすとき、$(G/K,<,>)$（もしくは、$(G/K,\sigma,<,>)$）を Riemann 3-対称空間とよぶ。

(i) $(G^\sigma)_0 \subset K \subset G^\sigma$, ($G^\sigma$ は σ の固定点集合、$(G^\sigma)_0$ はその単位元を含む連結成分)

(ii) s を $\pi \circ \sigma = s \circ \pi$ により定義される $(G/K,<,>)$ の微分同相写像とするとき、s は等長変換となる。

今、$(G/K,\sigma,<,>)$ を Riemann 3-対称空間とし、$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ をそれぞれ G, K の Lie 環とする。$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を G の Lie 環の $Ad(K)$-不変かつ σ- 不変分解とする (このような分解は存在する)。$\mathfrak{p}$ を G/K の $\{K\}$ における接空間と同一視すると、

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sigma + \frac{1}{2}I) : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

が G/K に G-不変概複素構造を誘導することが知られている。これを G/K の標準概複素構造と呼ぶ。このとき、次が成り立つことが知られている (Gray [G] 参照)。

Lemma 2.1.

$$[JX,JY]_{\mathfrak{k}} = [X,Y]_{\mathfrak{k}},$$
$$[JX,Y]_{\mathfrak{p}} = -J[X,Y]_{\mathfrak{p}}, \qquad X,\ \ Y \in \mathfrak{p}$$

次に、コンパクト単純 Lie 群の位数 3 の内部自己同型について簡単に復習しておこう。G をコンパクト単純 Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。$\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ を 1 つとり、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$に関する root 系を$\Delta$、その 1 つの基本 root 系を$\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ $(l = \dim\mathfrak{h})$ とする。Bを $\mathfrak{g}$ の Killing form とし、$\alpha \in \Delta$に対し $H_\alpha \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}$ を$\alpha(H) = B(H, H_\alpha)$ $(H \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ により定まるものとする。各 root ベクトル E_αが次をみたすとき、$\{E_\alpha, H_\alpha\}$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の Weyl 基底という。

$$
\begin{aligned}
&B(E_\alpha, E_{-\alpha}) = 1,\\
&[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha,\beta}E_{\alpha+\beta}, \quad N_{\alpha,\beta} = -N_{-\alpha,-\beta} \in \mathbb{R},\\
&E_\alpha - E_{-\alpha}, \quad \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \in \mathfrak{g}
\end{aligned}
$$

このとき、$\mathfrak{g}$ は

$$
\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \left(\mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \mathbb{R}\sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha})\right)
$$

と表せる。

$H_j \in \sqrt{-1}\mathfrak{h}$ $(j = 1, \cdots, l)$ を

$$
\alpha_i(H_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, l
$$

によって定める。$\delta = \sum_1^l m_i\alpha_i$を$\Delta$の$\Pi$に関する最高 root とする。このとき、次が成り立つ (cf. Helgason [H])。

Lemma 2.2. *$\mathfrak{g}$ (および、G) の位数 3 の内部自己同型は$\sigma = Ad(g)$ (G の場合は $\sigma(\cdot) = g(\cdot)g^{-1}$) に共役となる。ここで、$g \in G$ は以下のいずれか。*
(1) $g = \exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}H_i$, $(m_i = 2)$
(2) $g = \exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}(H_i + H_j)$, $(m_i = m_j = 1)$
(3) $g = \exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}H_k$, $(m_k = 3)$

Remark. $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^\sigma$とし、$\mathfrak{k}$ の中心を $\mathfrak{z}$ とすると、Lemma 2.1 の (1), (2), (3) に応じて $\mathfrak{z}$ の次元は、1, 2, 0 となる。

3. コンパクト 3-対称空間のある全測地的部分多様体

ここでは、コンパクト 3-対称空間の標準概複素構造 Jに関する適当な条件を満たす全測地的部分多様体について考察する。

この節を通して、$(G/K, \sigma, <,>)$ を G がコンパクトで、かつ$<,>$が G の両側不変計量から誘導されたものである Riemann 3-対称空間とする。∇ を $(G/K, <,>)$ の Levi-Civita 接続とするとき、Gray [G] は implicit に次のことを言っている (らしい)。

Lemma 3.1. *G/Kのアフィン接続$\bar\nabla$を次で定義するとき、$\bar\nabla$はG/Kの標準接続 (see [N], [KNo]) となる。*

$$
\bar\nabla_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{2}J\{\nabla_X J(Y)\}
$$

Proof. $o=\{K\}\in G/K$とおく。$X\in\mathfrak{p}$に対して、oのまわりのベクトル場X_*を

$$(X_*)_{\exp x\cdot o}=(d\exp x)_o(X),\quad (x\in\mathfrak{p},\quad |x|:\ \text{十分小さいとき})$$

によって定める。Lemma を示すには、$(\bar{\nabla}_{X_*}Y_*)_o=0$を言えばよい。$<,>$は$G$の両側不変なものから誘導されたものであるから、

$$(\nabla_{X_*}Y_*)_o=\frac{1}{2}[X,Y]_{\mathfrak{p}}$$

である。このことと、JのG-不変性、および、Lemma 2.1 を用いると容易に$(\bar{\nabla}_{X_*}Y_*)_o=0$が示せる。 □

Lemma 3.2. $(G/K,\sigma,<,>)$のJに関する全実全測地的部分多様体でその次元がG/Kのそれの半分であるものは、Gのある *Lie* 部分群の軌跡 *(*の一部*)* として表される。また、全複素 *(totally complex)* 全測地的部分多様体についても同様のことが成り立つ。

Proof. NをG/Kの全実全測地的部分多様体で$2\dim N=\dim G/K$となるものとする。このとき、Lemma 3.1 からNは$\bar{\nabla}$に関しても全測地的であることがわかる。

$\bar{T}$, $\bar{R}$をそれぞれ$\bar{\nabla}$に関するトーションテンソル、曲率テンソルとするとき、よく知られているように

$$\begin{aligned}\bar{T}_o(X,Y)&=-[X,Y]_{\mathfrak{p}},\\ \bar{R}_o(X,Y)Z&=-[[X,Y]_{\mathfrak{k}},Z],\qquad X,Y,Z\in\mathfrak{p}\end{aligned}$$

である。今、Nはoを通るものとして、$T_oN=V(\subset\mathfrak{p})$とすると、$N$が$\bar{\nabla}$に関して全測地的であるから、$\bar{T}_o(V,V)\subset V$, $\bar{R}_o(V,V)V\subset V$が成立する。したがって、$\mathfrak{a}=V+[V,V]_{\mathfrak{k}}$は$\mathfrak{g}$の Lie 部分環となり、$N\subset A\cdot o$となる。ここで、$A$は$\mathfrak{a}$に対応する$G$の連結 Lie 部分群である (このような$A\cdot o$が全測地的であることは、例えば[S], [To1] 参照)。

'totally complex' の場合も全く同様。 □

特に、Nが '全実' の場合は、$\mathfrak{a}$についてもう少し詳しいことがわかる。

Proposition 3.3. Gをコンパクト半単純で、G/Kは *almost effective* であるものとする。Nをoを通る$(G/K,\sigma,<,>)$の全実全測地的部分多様体で$2\dim N=\dim G/K$とする。$\mathfrak{g}$の *Lie* 部分環$\mathfrak{a}$を

$$\mathfrak{a}=V+[V,V]_{\mathfrak{k}},\qquad (V=T_oN)$$

とすると、$(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$は *symmetric pair* となる。

Proof. $\mathfrak{g}$はコンパクト半単純であるから、$\mathfrak{a}$の ($\mathfrak{g}$の Killing form に関する) 直交補空間を$\mathfrak{m}$とするとき、$[\mathfrak{m},\mathfrak{m}]\subset\mathfrak{a}$となることを示せばよいのだが、これは$<,>$が$Ad(G)$-不変であることと Lemma 2.1 を用いることにより直接確かめられる。その際、G/Kが almost effective ということから、$\mathfrak{m}=JV+[V,JV]_{\mathfrak{k}}$と直和分解されることを導くことが key となるのだが、詳しいことは省略する。 □

Example 3.4.

$$G = SU(2) \times SU(2) \times SU(2),$$
$$K = \Delta SU(2) = \{(g,g,g); g \in SU(2)\}$$

とするとき、$(G/K, <,>)$ には全実全測地的部分多様体で半分次元のものは存在しない。なぜなら、Proposition 3.3 における $\mathfrak{a}$ の可能性が実質的には、

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad \text{または、} \ \Delta su(2) \oplus \mathbb{R}, \quad (\Delta su(2) = \{(X,X); X \in su(2)\})$$

のどちらかであるが、これらはいま考えている部分多様体を構成しないことが次元の考察などから確かめられるからである。

Example 3.5. $(G/K, \sigma, <,>)$ を、G がコンパクト単純 Lie 群で、σが内部自己同型である Riemann 3-対称空間とする (Kはσの固定点集合、$<,>$ は G の両側不変計量から誘導されたもの)。σは内部自己同型であるから、$\mathfrak{g}$ の極大可換部分 Lie 環 $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{k}$ に含まれる。今、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$の $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に関する root 系Δをとり、第 2 節のようにΔに関する Weyl 基底を使って $\mathfrak{g}$ を

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \sum_{\alpha \in \Delta^+} \left(\mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha}) + \mathbb{R}\sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \right)$$

と書く。

$$\mathfrak{a} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathbb{R}(E_\alpha - E_{-\alpha})$$

とおくと、$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は対称対であり、A を $\mathfrak{a}$ に対応する G の連結 Lie 部分群とすれば、$A \cdot o$ は $(G/K, \sigma, <,>)$ の半分次元の全実全測地的部分多様体である。このことは、$(E_\alpha - E_{-\alpha}) \in \mathfrak{p}$ のとき

$$J(E_\alpha - E_{-\alpha}) = \sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha}) \ \text{ または } \ -\sqrt{-1}(E_\alpha + E_{-\alpha})$$

となることから容易にわかる。

4. 分類

ここでは、コンパクトで既約な 1-連結 Riemann 3-対称空間 $(G/K, \sigma, <,>)$ で、Kが G のあるトーラス部分群の中心化群であるもののみを考える。G/Kとしては almost effective であるもののみを考えれば十分なので、G はコンパクト単純 Lie 群としてよい (上記の Kに関する条件は、σが Lemma 2.2 の (1) または (2) の形をしていることと等価である)。また、G は単純なので、$<,>$として$-B$ (Bは Killing form) をとることにする。

この節の目的は、このような Riemann 3-対称空間 $(G/K, \sigma, <,>)$ の全実全測地的部分多様体 Nで半分次元のものを分類することである。以後、このような $(G/K, \sigma, <,>)$ と Nの対を TRG-pair と呼ぶことにしよう。

Takeuchi [T] は、G/Kがコンパクトタイプの Hermite 対称空間の場合に、上記のような部分多様体を第 1 種の graded Lie 環から構成した。それにならってまず、半分次元の全実全測地的部分多様体を構成することから始めよう。

$\mathfrak{g}^*$をその複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$が $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 環となる、$\mathbb{R}$ 上の noncompact 単純 Lie 環とする (すなわち、$\mathfrak{g}^*$は noncompact 実単純 Lie 環で、ある複素単純 Lie 環の係数制限とはならないもの)。τを $\mathfrak{g}^*$の Cartan involution とし、τに対応する Cartan 分解を

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}, \quad \tau|_{\mathfrak{a}} = 1, \ \tau|_{\mathfrak{m}} = -1, \tag{4.1}$$

とする。今、次のような $\mathfrak{g}^*$の (第 2 種の)gradation を 1 つ与える:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-2} + \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_0 + \mathfrak{g}^*{}_1 + \mathfrak{g}^*{}_2, \\ &\tau(\mathfrak{g}^*{}_p) = \mathfrak{g}^*{}_{-p}, \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

さらに、$Z \in \mathfrak{g}^*$を (一意に存在する) この gradation の characteristic element、すなわち、Zは次を満たす $\mathfrak{g}^*$の元:

$$\{X \in \mathfrak{g}^* | [Z, X] = pX\} = \mathfrak{g}^*{}_p, \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2) \tag{4.3}$$

このとき、(4.1), (4.2), (4.3) より、$Z \in \mathfrak{m} \cap \mathfrak{g}^*{}_0$ であることがわかる。さらに

$$\begin{aligned} &\mathfrak{g}^*{}_0 = \mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{a} + \mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{m}, \\ &\mathfrak{g}^*{}_p + \mathfrak{g}^*{}_{-p} = (\mathfrak{g}^*{}_p + \mathfrak{g}^*{}_{-p}) \cap \mathfrak{a} + (\mathfrak{g}^*{}_p + \mathfrak{g}^*{}_{-p}) \cap \mathfrak{m}, \quad (p = 1, 2) \end{aligned}$$

でもある。

$\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \sqrt{-1}\mathfrak{m}$ を、$\mathfrak{g}^*$に dual なコンパクト単純 Lie 環とし、$\mathfrak{g}$ の Lie 部分環 $\mathfrak{k}$ と、部分空間 $\mathfrak{p}$ を

$$\begin{aligned} &\mathfrak{k} = \mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{a} + \sqrt{-1}(\mathfrak{g}^*{}_0 \cap \mathfrak{m}), \\ &\mathfrak{p} = \bigoplus_{p=1}^{2} \{(\mathfrak{g}^*{}_p + \mathfrak{g}^*{}_{-p}) \cap \mathfrak{a} + \sqrt{-1}((\mathfrak{g}^*{}_p + \mathfrak{g}^*{}_{-p}) \cap \mathfrak{m})\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

によって定めると、reductive 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ が得られる。$\mathfrak{g}$ の内部自己同型σを

$$\sigma = Ad(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$$

により定めると、次が成り立つ。

Lemma 4.1. σは $\mathfrak{g}$ の位数 3 の内部自己同型であり、σの固定点集合 $\mathfrak{g}^\sigma$は $\mathfrak{k}$ に等しい。さらに、分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ はσ-不変である。

Lemma 4.1 により、

$$J = \frac{2}{\sqrt{3}}(\sigma + \frac{1}{2}I) : \mathfrak{p} \longrightarrow \mathfrak{p}$$

は、$\mathfrak{p}$ 上の複素構造を定めることがわかる。この Jを具体的に書いてみよう。

$$X_+ + X_- \in ({\mathfrak{g}^*}_1 + {\mathfrak{g}^*}_{-1}) \cap \mathfrak{a}, \quad (X_\pm \in {\mathfrak{g}^*}_{\pm 1})$$

とすると、(4.1) と (4.2) より、$\tau(X_\pm) = X_\mp$である。したがって、$\sigma = Ad(\exp \frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$ と、(4.3) より

$$J(X_+ + X_-) = \sqrt{-1}(X_+ - X_-) \in \sqrt{-1}(({\mathfrak{g}^*}_1 + {\mathfrak{g}^*}_{-1}) \cap \mathfrak{m})$$

となる。同様に、$X_+ + X_- \in ({\mathfrak{g}^*}_2 + {\mathfrak{g}^*}_{-2}) \cap \mathfrak{a}$ の場合は、$\tau(X_\pm) = X_\mp$であり、

$$J(X_+ + X_-) = -\sqrt{-1}(X_+ - X_-) \in \sqrt{-1}(({\mathfrak{g}^*}_2 + {\mathfrak{g}^*}_{-2}) \cap \mathfrak{m})$$

である。以上から、Killing form に関する直交直和 $\mathfrak{p} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{p} + J(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{p})$ が得られる。

今、$\mathfrak{g}^*$の複素化を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$とし、$G_c$を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$を Lie 環にもつ 1-連結な複素単純 Lie 群とする。G, A をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ を Lie 環にもつ G_c の連結 Lie 部分群とする。このとき、(G_cの岩沢分解を考えると)G は単連結であり、(G, A) は Riemann 対称対であることを注意しておく。また、$K = G^\sigma$とすると、Kは $\mathfrak{k}$ を Lie 環にもつ G の連結 Lie 部分群となり、上記のことから、$A \cdot o$ は $(G/K, \sigma, <,>)$ $(<,> = -B(,))$ の全実全測地的部分多様体で、$2\dim(A \cdot o) = \dim G/K$を満たす。このようにして得られた TRG-pair $((G/K, \sigma, <,>), A \cdot o)$ を graded Lie algebra $(\mathfrak{g}^*, \tau)$ に対応する TRG-pair と呼ぶことにしよう。

Remark 4.2. ${\mathfrak{g}^*}_{\pm 2} = \{0\}$ とおくと、上の構成法は[T] におけるコンパクトタイプの Hermite 対称空間内の半分次元の全実全測地的部分多様体の構成と同じものになっている。

Remark 4.3. ϕを 2 つの第 2 種の simple graded Lie algebras $(\mathfrak{g}^*, \tau)$, $(\bar{\mathfrak{g}}^*, \bar{\tau})$ の間の isomorphism、すなわちϕは $\mathfrak{g}^*$から$\bar{\mathfrak{g}}^*$への Lie 環としての isomorphism であり、

$$\phi({\mathfrak{g}^*}_p) = \bar{\mathfrak{g}}^*_p, \quad (p = 0, \pm 1, \pm 2) \quad \bar{\tau} \circ \phi = \phi \circ \tau$$

を満たすものとする。上と同様に、Cartan 分解を $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$, $\bar{\mathfrak{g}}^* = \bar{\mathfrak{a}} + \bar{\mathfrak{m}}$ とする。今、$\mathfrak{g}^*$および$\bar{\mathfrak{g}}^*$の複素化がまた単純 Lie 環であるとする。$\mathfrak{g}$, $\bar{\mathfrak{g}}$をそれぞれ $\mathfrak{g}^*$, $\bar{\mathfrak{g}}^*$の compact dual とし、

$$\phi' : \mathfrak{g} \longrightarrow \bar{\mathfrak{g}}; \quad \phi'(X + \sqrt{-1}Y) = \phi(X) + \sqrt{-1}\phi(Y), \quad (X \in \mathfrak{a}, Y \in \mathfrak{m})$$

とすると、ϕ'は $\mathfrak{g}$ から$\bar{\mathfrak{g}}$への isomorphism で、$\phi(\mathfrak{a}) = \bar{\mathfrak{a}}$, $\phi'(\mathfrak{k}) = \bar{\mathfrak{k}}$をみたすことがわかり、$G/K$から$\bar{G}/\bar{K}$への等長写像で、$A \cdot o$を$\bar{A} \cdot \bar{o}$へ写すものを誘導する。ここで、$\bar{G}$などは $(\bar{\mathfrak{g}}^*, \bar{\tau})$ に対応する TRG-pair の G などに対応するもの。

再び、$((G/K, \sigma, <,>), N)$ を TRG-pair で、$o \in N$となるものとする。以前のように $V = T_oN \subset \mathfrak{p}$ とし、$\mathfrak{a} = V + [V, V]_{\mathfrak{k}}$おく。Proposition 3.3 から $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ は対称対であったので、その標準分解を $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \sqrt{-1}\mathfrak{m}$ とし、noncompact dual を $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}$ とする (${\mathfrak{g}^*}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$:複素単純 Lie 環)。このとき、Propositon 3.3 の証明のなかで述べたように

$$\sqrt{-1}\mathfrak{m} = \sqrt{-1}\mathfrak{m} \cap \mathfrak{p} + \sqrt{-1}\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a} = JV + [V, JV]_{\mathfrak{k}}$$

であった。

Lemma 4.4. $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{k}$ の中心とする。このとき $[V, JV]_{\mathfrak{k}} \cap \mathfrak{z} (= \sqrt{-1}\mathfrak{m} \cap \mathfrak{z})$ のなかに

$$\sigma = Ad(\exp \frac{2\pi}{3} \sqrt{-1} Z)$$

で、$\mathrm{ad}(Z) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ の固有値が $0, \pm 1, \pm 2$ である元 $\sqrt{-1}Z$ が存在する。

Proof. $\dim \mathfrak{z} = 1$ または 2 であった。$\dim \mathfrak{z} = 1$ のときに Lemma を証明しよう ($\dim \mathfrak{z} = 2$ のときはやや面倒なのでここでは省略する)。

以前のように、$\mathfrak{k}$ に含まれる $\mathfrak{g}$ の極大可換 Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ をとり、$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に関する root 系 Δ および基本 root 系 $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ をとる。Lemma 2.2 より、$\sigma = Ad(\exp \frac{2\pi}{3} \sqrt{-1} H_i)$ と表せた。ここで、i は最高 root における α_i の係数が 2 であるようなもの。$\mathrm{ad}(H_i) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ の固有値は $0, \pm 1, \pm 2$ なので、Lemma を示すには $\mathfrak{z} = \mathbb{R}\sqrt{-1}H_i$ が $[V, JV]_{\mathfrak{k}}$ に含まれることを示せば十分である。

$$\sqrt{-1}H_i = A_1 + A_2, \quad A_1 \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}, \ \ A_2 \in \mathfrak{k} \cap \sqrt{-1}\mathfrak{m}$$

と分解する。すると、

$$\sqrt{-1}H_i \in \mathfrak{z}, \ \ [\sqrt{-1}\mathfrak{m}, \sqrt{-1}\mathfrak{m}] = \mathfrak{a}, \ \ [\mathfrak{a}, \sqrt{-1}\mathfrak{m}] = \sqrt{-1}\mathfrak{m}$$

であることから $A_1, A_2 \in \mathfrak{z}$ を得る。ところが、$\dim \mathfrak{z} = 1$ であったので A_1 と A_2 のどちらかは 0 でなくてはならない。そこで $A_2 = 0$、すなわち $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{a}$ と仮定する。このとき $[\mathfrak{a}, V] \subset V$ より任意の $X \in V$ に対して、

$$\sigma(X) = -\frac{1}{2}X + JX \in V \quad \text{すなわち} \quad JX \in V$$

となる。明らかにこれは矛盾であり、結局 $A_1 = 0$、すなわち $\mathfrak{z} \subset [V, JV]_{\mathfrak{k}}$ が示された。 □

Lemma 4.4 より Z を characteristic element とする第 2 種の graded Lie 環 $(\mathfrak{g}^*, \tau)$:

$$\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}^*{}_{-2} + \mathfrak{g}^*{}_{-1} + \mathfrak{g}^*{}_0 + \mathfrak{g}^*{}_1 + \mathfrak{g}^*{}_2$$

が得られる。この graded Lie algebra のつくり方は、先の graded Lie algebra から TRG-pair の構成の逆になっている。以上から次が得られた。

Proposition 4.5. 全ての TRG-pair は、ある第 2 種の *graded Lie algebra* に対応する。

2 つの TRG-pair $((G/K, \sigma, <,>_G), N)$, $\left((\bar{G}/\bar{K}, \bar{\sigma}, <,>_{\bar{G}}), \bar{N}\right)$ が equivalent であるとは、等長写像

$$\varphi : (G/K, <,>_G) \to (\bar{G}/\bar{K}, <,>_{\bar{G}}) \quad \text{で} \quad \varphi(N) = \bar{N}$$

となるものが存在するときを言うことにしよう (当然これは同値関係になる)。

2 つの TRG-pair $((G/K,\sigma,<,>_G),N)$, $\left((\bar{G}/\bar{K},\bar{\sigma},<,>_{\bar{G}}),\bar{N}\right)$が equivalent であるとする。ただし、$G/K$および$\bar{G}/\bar{K}$は effective とする。また話を簡単にするため、始めから $o\in N$, $\bar{o}\in\bar{N}$としよう。このとき、equivalence を与える G/Kから$\bar{G}/\bar{K}$への等長写像φ として特に o を$\bar{o}$に写すものがとれることがわかる。$(G/K,<,>_G)$ の等長変換群から $(\bar{G}/\bar{K},<,>_{\bar{G}})$ の等長変換群への (連続な) 同型写像ι_φを$\iota_\varphi(f)=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$によって定義すると、[To2] の Theorem 3.6 から$\iota_\varphi(G)=\bar{G}$であることがわかる。さらに、$\varphi(o)=\bar{o}$, $\varphi(N)=\bar{N}$であることから

$$\iota_\varphi(K)=\bar{K},\quad \iota_{\varphi_*}(\mathfrak{a})=\bar{\mathfrak{a}}$$

となる。また、$\sigma=Ad(\exp\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}Z)$ であるとき、$\sigma'=Ad(\exp\frac{2\pi}{3}\iota_{\varphi_*}(\sqrt{-1}Z))$ は、$(\bar{G}/\bar{K},<,>_{\bar{G}})$ の Riemann 3-対称構造を定めることがわかる。明らかに、

$$((G/K,\sigma,<,>_G),N)\quad と \left((\bar{G}/\bar{K},\sigma',<,>_{\bar{G}}),\bar{N}\right)$$

とから得られる graded Lie 環は isomorphic である。

$\mathfrak{k}$ の中心の次元は 1(つまり、2nd Betti 数が 1) であると仮定すると、Lemma 4.4 の $\left((\bar{G}/\bar{K},\bar{\sigma},<,>_{\bar{G}}),\bar{N}\right)$に対応する$\sqrt{-1}\bar{Z}$は$\iota_\varphi(\sqrt{-1}Z)$ または$-\iota_\varphi(\sqrt{-1}Z)$ に等しい。このことから$\left((\bar{G}/\bar{K},\bar{\sigma},<,>_{\bar{G}}),\bar{N}\right)$と$\left((\bar{G}/\bar{K},\sigma',<,>_{\bar{G}}),\bar{N}\right)$から得られる graded Lie 環は isomorphic である。Remark 4.3 と上のことから結局次が示された。

Theorem 4.6. 上記の対応により、全射

$$\{\,第 2 種の単純\ \textit{graded Lie}\ 環で、その複素化が単純\ \textit{Lie}\ 環であるもの\,\}/\sim$$

$$\downarrow$$

$$\{\textit{TRG-pairs}\}/\sim$$

が得られる。

特に、上の全射を $\mathfrak{g}_0$の中心の次元が 1 である *graded Lie* 環に制限したものは 1 対 1 対応

$$\{\,第 2 種の単純\ \textit{graded Lie}\ 環\ \mathfrak{g};\ \ \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}は単純で、\mathfrak{g}_0の中心の次元は 1\}/\sim$$

$$\updownarrow$$

$$\{\textit{TRG-pair}\ で、b_2(G/K)=1\}/\sim$$

を引きおこす。

Remark 4.7. 第 2 種の graded Lie algebra の isomorphism class は、Kaneyuki [K] によって分類されている。

※ 最後に、本講の準備の際に有益なアドバイスを下さった塚田先生に感謝の意を表します。

REFERENCES

[G] A. Gray, *Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3*, J. Differetial Geometry **7** (1972), 343–369.

[H] S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces, Academic Press, 1978.

[K] S. Kaneyuki, *On the subalgebras* $\mathfrak{g}_0$ *and* $\mathfrak{g}_{ev}$ *of semisimple graded Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 1–19.

[KA] S. Kaneyuki and H. Asano, *Graded Lie algebras and generalized Jordan triple systems*, Nagoya Math. J. **112** (1988), 81–115.

[KN] S. Kobayashi and T. Nagano, *On filtered Lie algebras and geometric structures I*, J. Math. Mech. **13** (1964), 875–908.

[KNo] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, II*, Interscience Publishers, 1969.

[N] K. Nomizu, *Invariant affine connections on homogeneous spaces*, Amer. J. Math. **76** (1954), 33–65.

[S] A. Sagle, *A note on triple systems and totally geodesic submanifolds in a homogeneous space*, Nagoya Math. J. **91** (1968), 5–20.

[T] M. Takeuchi, *Stability of certain minimal submanifolds of compact Hermitian symmetric spaces*, Tôhoku Math. J. **36** (1984), 293–314.

[To1] K. Tojo, *Totally geodesic submanifolds of naturally reductive homogeneous spaces*, Tsukuba J. Math. **20** (1996), 181–190.

[To2] ———, *Kähler C-spaces and k-symmetric spaces*, Osaka J. Math. **34** (1997), 803–820.